Université Hassan II- Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia
Département de Mathématiques

Année 2015/2016
Parcours: **MIP**
Module: **M136**

Corrigé du partiel 1 d'analyse 4 (M 136)

Session Automne 2015- S3 (2 H)

Exercice 0.1

1. *Soit la série de fonctions de terme général* $(f_n)_{n\geq 2}$ *définie par:* $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

   (a) ***Convergence simple de la série*** $\sum f_n$ ***et intervalle de convergence.***
   D'après le critère de d'Alembert on a

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mid f_{n+1}(x) \mid}{\mid f_n(x) \mid} = e^{-x}$$

   La série $\sum f_n$ *converge si* $e^{-x} < 1$ *et diverge si* $e^{-x} > 1$. *Comme* $f_n(0) = 0$ *alors la série* $\sum f_n$ *converge simplement sur l'intervalle* $I = [0, +\infty[$

   (b) *En utilisant la remarque:* $\sup\limits_{x\geq 0} te^{-t} = \dfrac{1}{e}$ *on aura:*

   $$\sup_{x\geq 0} |f_n(x)| = \sup_{x\geq 0} |\frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}| = \sup_{x\geq 0} |\frac{xne^{-nx}}{n\ln(n)}| = \frac{1}{ne\ln(n)}.$$

   (c) ***Convergence normale sur*** I.
   Ne converge pas normalement car $\sum \dfrac{1}{ne\ln(n)}$ *diverge (série de Bertrand* $\alpha = 1$*).*

2. *Soit la fonction définie par* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n xe^{-nx}}{n\ln(n)}$.

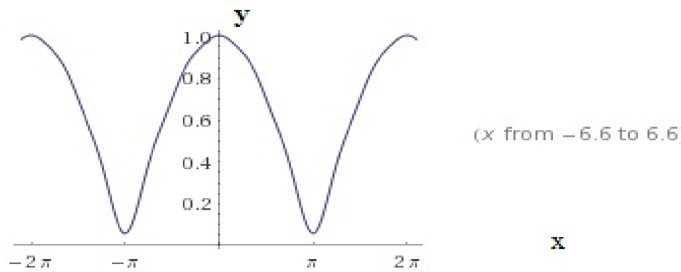
   (a) ***Domaine de définition de*** f.
   D'après la question 1) a) le domaine de définition de f *est* $D_f = [0, +\infty[$.

   (b) ***Continuité de*** f ***sur*** $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in D_f$ *le reste de cette série alternée convergente vérifie:*
   $0 \leq \sup\limits_{x\geq 0} \mid R_n(x) \mid \leq \dfrac{1}{(n+1)e\ln(n+1)}$, *et comme* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n+1)e\ln(n+1)}$ *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\geq 0} \mid R_n(x) \mid$, *et donc la convergence est uniforme sur* $\mathbb{R}$ *d'où la continuité de* f *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 0.2

Soit la fonction f, 2π -périodique, définie par $f(x) = \cos(x/2)$.

1. ***Graphique de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.***



2. ***Développement en séries de Fourier de f.***
f paire $b_n = 0$. On rappelle que $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(x/2)dx = \frac{2}{\pi}\Big[2\sin(x/2)\Big]_0^\pi = \frac{4}{\pi}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(x/2)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(\cos((2n+1)\frac{x}{2}) + \cos((2n-1)\frac{x}{2})\big)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{2}{2n+1}\sin((2n+1)\frac{x}{2}) + \frac{2}{2n-1}\sin((2n-1)\frac{x}{2})\Big]_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2n-1}\sin((2n-1)\frac{\pi}{2})\Big] \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\Big] = \frac{4}{\pi}.\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}. \end{aligned}$$

$$S_f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos(nx).$$

3. ***Convergence de la séries de Fourier.*** *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. La convergence de la série de Fourier est donc uniforme sur $\mathbb{R}$. De plus* $\mid a_n \mid = \frac{4}{\pi}.\frac{1}{4n^2-1} \sim \frac{1}{\pi}.\frac{1}{n^2}$ *au voisinage de l'infini et ce dernier terme forme une série numérique convergente la convergence est donc normale sur $\mathbb{R}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $S_f(x) = f(x)$.*

4. ***Calcul des sommes.***
Pour la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ *on pose $x = \pi$.*

$f(\pi) = \cos(\pi/2) = 0 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}(-1)^n = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$, *d'où*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

Pour la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$ *on pose* $x = 0$ *et comme* $f(0) = 1$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Pour la dernière la somme on utilise l'égalité de Parseval

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

<u>Exercice</u> 0.3

Première partie.

1. ***Calcul de*** I

   On a $I = \displaystyle\int_{\Gamma^+} \frac{\cos(z^2)dz}{(2z-1)^3}$, *où* Γ^+ *le cercle de centre* (1,0) *et de rayon* 1.

   D'après la formule intégrale de Cauchy on a:

   $I = \displaystyle\int_{\Gamma^+} \frac{\cos(z^2)dz}{(2z-1)^3} = \int_{\Gamma^+} \frac{\cos(z^2)dz}{8(z-1/2)^3} = \frac{2i.\pi}{2!} f''(1/2)$ *où* $f(z) = \dfrac{\cos(z^2)}{8}$.

   $f''(1/2) = -\dfrac{1}{4}\Big(\sin(z^2) + 2z^2\cos(z^2)\Big)\big|_{z=1/2} = -\dfrac{1}{4}\Big(\sin(1/4) + \dfrac{1}{2}\cos(1/4)\Big)$.

   $$I = -\frac{i.\pi}{4}\Big(\sin(1/4) + \frac{1}{2}\cos(1/4)\Big).$$

   Méthode de résidus:

   Pour $g(z) = \dfrac{\cos(z^2)dz}{(2z-1)^3}$.

   $$I = \int_{\Gamma^+} \frac{\cos(z^2)dz}{(2z-1)^3} = 2i.\pi.Res(g,1/2) = \frac{2i.\pi}{2!}.\lim_{z\to 1/2}\Big(\frac{d^2}{dz^2}\big((z-1/2)\frac{\cos(z^2)dz}{(2z-1)^3}\big)\Big).$$

   Donc $I = \dfrac{i.\pi.}{8}\displaystyle\lim_{z\to 1/2}\Big(\frac{d^2}{dz^2}\big(\cos(z^2)\big)\Big) = \frac{i.\pi}{4}\Big(\sin(1/4) + \frac{1}{2}\cos(1/4)\Big)$.

2. *On pose* $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos(x)}$, $z = e^{ix}$ *et on rappelle que* $\cos(x) = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$.

   (a) *Établissons que* $I = \displaystyle\int_{\Gamma^+} f(z)dz$, *où* f *et* Γ^+ *sont à déterminer.*

   $f(z) = \dfrac{2}{i(z^2+4z+1)}$, *et* Γ^+ *le cercle unité.*

   (b) ***Valeur de*** I***.***

   $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos(x)} = 2i.\pi.Res(f,-2+\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Deuxième partie. *Soit* $a_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}, \; n \geq 0$

1. ***Relation de récurrence entre*** a_{n+1} ***et*** a_n***.***
   Il est facile de vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = \dfrac{2(2n+3)}{n+1} a_n$.
2. ***Rayon de convergence de la série de terme général*** $a_n x^{2n}$***.***
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}x^{2(n+1)}}{a_n x^{2n}} = 4.x^2$.
   La série converge pour $4.x^2 < 1$ *et diverge pour* $4.x^2 > 1$ *donc* $R = \dfrac{1}{2}$.
3. *On pose pour tout* $x \in]-R,R[$, $\; f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$.
   Montrons que f *est solution de l'équation différentielle.*
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 4(2n+3)a_n x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} 8na_n x^{2n+1} + 12\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n+1} \\ &= 4x^2.\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{2n-1} + 12x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} = 4x^2.f'(x) + 12xf(x). \end{aligned}$$
   Donc
   $$(E): \quad (1-4x^2)f'(x) = 12.x.f(x).$$
4. *Solution de l'équation* (E) *et* f *sous forme de fonction élémentaire.*
   La solution générale de (E) *est donnée par:*
   $f(x) = K.(1-4x^2)^{-3/4}$, *mais* $f(0) = a_0 = 1$ *donc* $k = 1$ *et*
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n} = (1-4x^2)^{-3/2}.$$

: